普通人眼中的微积分

林念

一个普通爱好者

序

一个数学爱好者的自白

作为一个普通的数学爱好者，一直很想聊聊自己视角下的微积分。

比起专业教材，这篇长文，姑且称之为讲义，更多是为了解决我在看书时的“为什么?”而出现的。

我是一个很容易走神的人，大学里微积分课，老师讲极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，我看明白了，但还是在心里问，“怎么想到这样定义极限的呢？为什么我们要定义极限？”看科普时看到戴德金分割，花费一番力气搞清楚了，又在想，“为什么能想到这样的定义方式？天才的想法就是这样琢磨不透吗？”又有于品教授的讲义，上面有一个 Schroeder-Bernstein 定理，我就在想为什么你就能想到我们要考虑 $\mathcal{F}=\{X\subset A|h(X)\cup A_0\subset X\}$ ？

记不得多少次在深夜对着一个定义发呆，心里憋着问的“凭什么”最终也只变成一次叹气。

我是一个资质平庸的人，好奇心对我来讲不是什么优秀品质，按曾经我的一个老师的话讲，我是眼高手低。

像是一个没有艺术天赋的人逛画展，只要欣赏就好了，为什么要用自己粗浅的头脑揣测艺术家的作画过程?

是啊为什么呢?

这个问题深深地折磨我，今天我会开始尝试回答。

2026年4月7日

关于我

QQ群：97676468。b站：林念太倒霉了。

目录

序 1

1 数列极限 3

1.1 从历史到定义 3
1.2 单调有界数列 4
1.3 柯西收敛定理 5
1.4 一些例子 7
1.4.1 $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ 7
1.4.2 Cauchy 命题 9
1.4.3 Stolz 公式 10

2 实数 14

2.1 动机 14
2.2 公理化实数系 14
2.3 从 $\mathbb{Q}$ 构造 $\mathbb{R}$ 18

3 集合的基数 25

3.1 实数比有理数多吗? 25
3.2 可数集 27
3.3 不可数集 30
3.4 实数集 33

4 连续函数 36

4.1 从历史到定义 36
4.2 函数极限的性质 36

1 数列极限

1.1 从历史到定义

在古希腊时期，人们为了计算圆的面积，提出了用一列圆内接正 n 边形的面积 S_n 来逼近圆的面 S 。用现在的话说，这个序列 $\{S_n\}$ 的“极限”是 S 。

柯西或许是第一个深入思考了这些有“极限”的特殊数列和它们的“极限”之间的关系的人，他对这种关系给出了一个正式的定义：

定义 1. 柯西的极限定义

设 $\{x_n\}$ 是一个实数序列，a 是一个实数，若 $\{x_n\}$ 在整体上趋近于 a ，且差值

$$|x_n - a|$$

在整体上趋近于 0 。就称 $\{x_n\}$ 的极限是 a 。

柯西的定义非常直观，但是不够严谨，他用了“趋近 approach”这些口语，数学家 Weierstrass 整理了这个定义，给出了一个更严谨的版本：

定义 2. Weierstrass 的极限定义

设 $\{x_n\}$ 是一个实数序列，a 是一个实数。若取任意 $\varepsilon > 0$ ，存在一个对应的正整数 $N = N(\varepsilon)$ 使得：对任意 $n > N$ ，都有

$$|x_n - a| \in \varepsilon.$$

则称 $\{x_n\}$ 的极限是 a 。

思考一下，“任意 ε ，存在一个 N ”和“存在一个 N ，任意的 ε ”逻辑上是否是等价的？

我们关心很多问题，怎样的数列才有极限？一个数列只能有一个极限吗？怎么计算数列的极限？有极限的数列都具有什么性质……

文艺一点我们把有极限的数列称作收敛数列，把没有极限的数列称作发散数列。

我们现在就能回答，一个数列至多有一个极限：设 $\{a_n\}$ 是数列，a, b 都是它的极限，也就是说

$$a_n - a \to 0$$

且

$$a_n - b \to 0.$$

我们*希望*有

$$c_n = a - b = (a_n - b) - (a_n - a) \to 0.$$

显然 c_n 作为一个常值数列趋于 0 ，就代表每项都是 0 ，也就是 $a - b = 0$ 。

这个*希望*是可以证明的，事实上我们可以发现求极限和四则运算的关系：

定理 1. 极限的四则运算

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α ，$\{b_n\}$ 收敛到 β ，则有

1. $\{a_n + b_n\}$ 收敛到 $\alpha + \beta$ ；

2. $\{a_n \cdot b_n\}$ 收敛到 $\alpha\beta$ ；

3. 若 $\beta \neq 0$ 则 $\{a_n / b_n\}$ 收敛到 α / β 。

我们还有一个结果，在计算（证明）极限时候很好用：

定理 2. 夹逼定理

设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 是数列，且存在一个正整数 N_0 ，当 $n \geq N_0$ 时

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

恒成立。若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$$

1.2 单调有界数列

如上一节提到的，人类第一次探索数列和极限的关系，很可能就发生在单调递增数列 $\{S_n\}$ 和它的极限 S 上。其中 S 是 $\{S_n\}$ 的上界，且是一个特殊的上界。

极限一词 limit 的词源就是拉丁语 limes ，意为“边界”。我们在口语中也总是把“极限”用作描述某个集合的一个特殊上界。

这些上界特殊在哪？我们发现特殊在它是关于对应集合的最小的上界。我们称它是集合的“上确界”。

定义 3. 上界，上确界

设 E 是实数集的一个子集，a 是实数。若对于任意 $x \in E$ 都有 $x \leq a$ ，则称 a 是集合 E 的一个上界。

若 a 是集合 E 的一个上界，且 a 是集合 E 的所有上界中最小的上界，则称 a 是 E 的上确界。

类似地我们可以定义下确界。

显然如果 E 是一个无穷集，那么对于它的上确界 a ，可以从 E 中找到一串单调递增的序列 $\{a_n\} \subset E$ 使得 $a_n \to a$ ；反过来对于任意一个单调递增的数列 $\{a_n\}$ ，它的极限如果存在也一定是它的上确界.。

我们应该会提出这样一个问题：每个单调递增的数列都有极限吗？没有上界的肯定没有，递增到正无穷了，有上界的呢？

设 $\{a_n\}$ 是单调递增的数列，已知它存在一个上界 M ，它一定存在极限吗？换句话说，它一定存在上确界吗？

几何直觉告诉我们，把 M 对应的点在数轴上往左移动，一定会有某个点正好是上确界. 所以单调递增且有上界的数列一定有上确界，也就是它的极限。

我们可以用这个方法得到更一般的结论，实数系里，任意一个非空有上界的子集，都存在上确界。我们把这个结论叫做 **确界原理** 。我们没有证明它，只是由几何直觉相信它成立。或者说我们假设实数系具有这么一个几何性质。

1.3 柯西收敛定理

我们会接触很多具体的数列，随着接触得多了，我们可能会好奇，有没有一个一般的法则，来判断数列是否收敛呢？

回顾数列极限的定义，我们目前只有在知道数列的极限的前提下，才能证明数列是收敛的。但是 “按道理” 应该有一个方法是基于数列通项本身的变化情况来判断它是否收敛。

如果 $\{x_n\}$ 是收敛数列，那么由于它的项在整体上离 $\lim x_n$ 越来越近，这些项之间也在整体上越来越近，用数学语言表述就是：任给 $\epsilon > 0$ ，存在对应的正整数 N ，任意 $m, n > N$ 都有

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

我们把满足这样性质的数列叫做 Cauchy 列，也就是说收敛数列一定是 Cauchy 列，那么反过来 Cauchy 列一定收敛吗？这其实是一个靠自己想很难想出来的问题。柯西自己可能也没有想明白，他只是把它当作一个不需证明的事实。

设 $\{a_n\}$ 是柯西数列，若它不收敛，那么对于任意 $x \in \mathcal{R}$ ， x 都不是 $\{a_n\}$ 的极限。

在学极限概念的时候，有人发现，如果说 r 是 $\{r_n\}$ 的极限，是不是说关于 r 的任意一个”范围很小的以 r 为中心的开区间”，我们称 r 的一个”邻域”

$$(r-\epsilon, r+\epsilon),$$

$\{r_n\}$ 都只有有限项落在这个邻域外面。

对于柯西列 $\{a_n\}$, 若 $x \in \mathcal{R}$ 不是它的极限，则存在一个关于 x 的邻域 $E(x)$ ，只包含 $\{a_n\}$ 的有限项:

证明. 假设对于任意 x 的邻域 $E(x)$ ，都包含 $\{a_n\}$ 的无穷多项，则我们可以找到 $\{a_n\}$ 的一个”子列”（从 $\{a_n\}$ 中”挑出来”的一个数列） $\{a_{f(n)}\}$, 使得 x 是这个子列 $\{a_{f(n)}\}$ 的极限, 其中 $f:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ 是一个严格递增函数。对于柯西列，我们知道它的项在整体上集中，现在又有一个子列 $\{a_{f(n)}\}$ 趋近于 x，我们很容易想象剩下的项 $\{a_n\}\setminus\{a_{f(n)}\}$ 构成的子列 $\{a_{g(n)}\}$ 和 $\{a_{f(n)}\}$ 相互吸引着靠近，然后也趋近于 x 。事实上我们可以给出严谨证明. 所以 $\{a_n\}$ 趋近于 x ，这和我们的前提矛盾。 □

我们很容易知道柯西列是有界的，所以 $\{a_n\} \subset [m, M]$, 若它不收敛，结合上文我们知道对于任意 $x \in [m, M]$ 都存在一个对应的邻域 $E(x)$ 只包含 $\{a_n\}$ 的有限项。而这些 $E(x)$ 覆盖了闭区间 $[m, M]$ ，即

$$[m, M] \subset \bigcup_{x \in [m,M]} E(x).$$

凭几何直觉我们认为如果一堆开区间盖住了一个闭区间， 可以从这些开区间里找出有限个开区间覆盖住这个闭区间。也就是说存在有限个

$$x_1, x_2, ..., x_m \in [m, M]$$

使得

$$[m, M] \subset \bigcup_{1 \le k \le m} E(x_k).$$

那么

$$\{a_n\} \subset \bigcup_{1 \le k \le m} E(x_k).$$

然而每个 $E(x_k)$ 只包含 $\{a_n\}$ 的有限项，那么它们的并集也只包含有限项，这就产生了矛盾。所以 $\{a_n\}$ 只可能收敛。

过程中的这个**直觉**，或者说对实数的又一个几何性质假设，我们称为**紧性**。

1.4 一些例子

1.4.1 $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$

这可能是最有名的一个单调数列

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^n.$$

据说它来自复利问题: 某家银行这样计算利息, 你存入 x 年, 则你连本带利将得到 $(1+x)$ 倍的本金。假设你存入一年, 则你将得到

$$(1+1)=2$$

倍本金。此时有人发现, 如果我把一年拆成两个 $1/2$ 年, 我在第一个 $1/2$ 年后得到

$$(1+1/2)$$

倍本金, 取出来再存进去, 在第二个 $1/2$ 年后得到

$$(1+1/2)^2$$

倍本金。这比一开始要得到的更多。如果分成 3 次呢? n 次呢? 我们可以用计算器, 发现

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

似乎是随着 n 递增的。那它有极限吗? 还是会递增到正无穷?

先证明它递增, 做除法

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}\\&=(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)})^n\frac{n+1}{n+2}\\&=(1+\frac{1}{n(n+2)})^n\frac{n+1}{n+2}\\&=(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k(n+2)^k})\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

我们希望结果小于 1 ，所以我们尽量对

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k\,(n+2)^k}$$

这个复杂的式子做适当的放缩，这个没什么特别的方法，就是观察加经验，还可能要多调整几次

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k\,(n+2)^k}$$

$$=\frac{1}{n+2}+\frac{n-1}{2!\cdot n\cdot(n+2)^2}+\frac{(n-1)\,(n-2)}{3!\cdot n^2\cdot(n+2)^3}$$

$$+\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{4!\cdot n^3\cdot(n+2)^4}+\ldots.$$

注意到

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k}=\frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}<1.$$

所以我们试着这样放缩

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k\,(n+2)^k}$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(n+2)^k}$$

$$<\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2\cdot(n+2)^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k!(n+2)^k}.$$

为什么是要展开两项不是一项，因为按我的放缩方法只展开一项不够，总之我们有

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k!(n+2)^k}<\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k!(n+2)^3}$$

$$=\frac{1}{(n+2)^3}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$<\frac{1}{(n+2)^3}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\,(k-1)}$$

$$<\frac{1}{(n+2)^3}\frac{1}{2}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k(n+2)^k}<\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}&=(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k(n+2)^k})\frac{n+1}{n+2}\\&<(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2})\frac{n+1}{n+2}\\&=\frac{n^3+6n^2+12n+7}{n^3+6n^2+12n+8}<1.\end{aligned}$$

我们证明了递增。

有界性借助上面的不等式可以很好说明。

总之我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$$

存在。我们把它记为 e 。

1.4.2 Cauchy 命题

例 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

这个 n 次方根的形式让我们想到*均值不等式*

$$0<\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\leq\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n},$$

这又让你想到夹逼定理，如果左式随着 $n\to\infty$ 而趋于 0 我们就完成证明了。

我们分析一下左式，左式是 1 到 $1/n$ 的算术平均值，可以看到相加项是一个递减且趋于零的数列，那么随着 n 的增大，平均值也大概会趋于 0 。(反过来想想如果是 1 到 n 的算术平均值是不是会趋于正无穷。）严谨一点我们可以证明：

命题 1. Cauchy 命题

设 $\{x_n\}$ 是数列，如果 $x_n \to 0, (n \to \infty)$ ，则

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \to 0, (n \to \infty).$$

任意给定 $\epsilon > 0$ ，我们知道存在正整数 N_1 ，任意 $n > N_1$ 都有

$$|x_n - 0| < \epsilon.$$

所以当 $n > N_1$ 时，

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_1}}{n} + \frac{x_{N_1+1} + x_{N_1+2} + \ldots + x_n}{n} \\
&= A_n + B_n
\end{aligned}$$

显然

$$|B_n| \leq \frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |x_k|}{n} < \epsilon.$$

又随着 $n \to \infty$ ，$A_n \to 0$。也就是说存在正整数 $N_2 > N_1$ ，$n > N_2$ 时 $|A_n| < \epsilon$ ，此时

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right| < 2\,\epsilon.$$

根据 ϵ 取值的任意性我们知道极限为 0 。

事实上这里把 0 换成其他常数也是一样的，直观上都是数列集中于某个常数，所以前 n 项的平均值也会集中于这个常数。

事实上，

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

也是一种平均值，所有项相乘再开方，我们称这是“几何平均值”。所以我们可以像证明算术平均值形式的极限一样直接证明它对应的极限。

上文中这种分成两个部分分别估计的想法，也应该会在以后做题时碰到。

1.4.3 Stolz 公式

对于上文中的

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, (x_n \to 0),$$

或许我们会想到把分母也写成 n 个项相加

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{1+1+\ldots+1}.$$

我们知道

$$\frac{x_n}{1}\to 0.$$

也就是说任意给定 $\epsilon>0$ ，存在 N_1 ，任意 $n>N_1$ ，都有

$$-\epsilon<\frac{x_n}{1}<\epsilon.$$

所以对于任意 $n>N_1$ ，

$$-\epsilon<\frac{\sum_{k=N_1}^{n}x_k}{\sum_{k=N_1}^{n}1}<\epsilon.$$

故当 $n>N_1$ 时

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\\
&=\frac{\sum_{k=1}^{N_1}x_k+\sum_{k=N_1+1}^{n}x_k}{\sum_{k=1}^{N_1}1+\sum_{k=N_1+1}^{n}1}\\
&=\frac{\sum_{k=1}^{N_1}x_k}{\sum_{k=1}^{N_1}1+\sum_{k=N_1+1}^{n}1}+\frac{\sum_{k=N_1+1}^{n}x_k}{\sum_{k=N_1+1}^{n}1}\cdot\frac{\sum_{k=N_1+1}^{n}1}{\sum_{k=1}^{N_1}1+\sum_{k=N_1+1}^{n}1}\\
&=A_n+B_n\cdot C_n.
\end{aligned}$$

易知

$$A_n\to 0, C_n\to 1.$$

故存在充分大的 $N_2>N_1$ ，当 $n>N_2$ 时

$$-\epsilon<A_n<\epsilon, 0<C_n<2, -\epsilon<B_n<\epsilon.$$

故 $n>N_2$ 时

$$-3\,\epsilon<\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}<3\,\epsilon.$$

根据 ϵ 的任意性可知

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\to 0, (n\to\infty).$$

更一般的

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n}$$

这样形式的极限，我们也有对应的结论。

命题 2. 一个结论 设 $a \in \mathcal{R}$, $x_n, y_n \in \mathcal{R}$ ，$y_n > 0$ 总是正数，且

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \to +\infty.$$

若

$$\frac{x_n}{y_n} \to a, (n \to \infty).$$

则

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} \to a, (n \to \infty).$$

请你仿照上文自行给出证明。

我们把这个结论变形一下，令

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

就得到了 Stolz 公式（之一）。

定理 3. Stolz 公式之一

设 $a \in \mathcal{R}$ ，$X_n, Y_n \in \mathcal{R}$ ，$\{Y_n\}$ 是严格单调递增到正无穷的数列，若

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n - X_{n-1}}{Y_n - Y_{n-1}} = a,$$

则

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{Y_n} = a.$$

我们还有

定理 4. Stolz 公式之二 设 $a \in \mathcal{R}$ ，$X_n, Y_n \in \mathcal{R}$ ，$\{Y_n\}$ 是严格单调递减到 0 的数列，若

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n - X_{n-1}}{Y_n - Y_{n-1}} = a,$$

则

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{Y_n} = a.$$

(PS: 严格单调的意思是后一项与前一项不取等号。)

2 实数

2.1 动机

在上一节我们提到了，我们有关极限的两个重要结论，是基于我们对实数集的几何性质的假设。这就给了我们动机去研究实数集本身。

我们希望实数集具有哪些性质呢？这些性质是否会冲突？实数集到底是个怎样的集合，或者说，实数集的定义是什么？

极限理论是微积分的基础，实数理论则是极限理论的基础。

在学习微积分之前，我们对实数的认识其实是基于几何学概念的，实数代表长度，代表面积，代表体积。我们没有想过它到底该怎么定义，为什么它是”数”?

最简单的数是自然数，加法的逆运算让我们想着扩充它，于是有了负数，乘法的逆运算让我们想着定义分数（也就是有理数），从自然数到有理数的构造是比较简单自然的，但是从有理数到实数的构造很困难。历史上我们一开始认为有理数可以表示所有物体了，然而几何学告诉了我们腰长为 1 的等腰直角三角形的斜边长度不能用有理数表示，这个发现被我们称为第一次数学危机。古希腊人甚至把“数”分成两种，一种是有理数，另一种是几何上的各种”度量”。

我们这章的目的是用有理数去构造出实数，并验证它满足我们的各种假设。

2.2 公理化实数系

首先我们希望实数系是这样的

$$(\mathcal{R},+,\times,<,=)$$

其中 R 是集合，$+,\times$ 是 R 上的二元运算，$<$ 是 R 上的序关系，$=$ 是 R 上的等价关系。它们满足

命题 3. *加法公理*

1. $\forall x,y\in R$ ，$x+y=y+x$ ；
2. $\forall x,y,z\in R$ ，$(x+y)+z=x+(y+z)$ ；
3. 存在元素 $0\in R$ ，使得任意 $x\in R$ ，成立 $0+x=x$ ；
4. 对任意 $x\in R$, 存在 $y\in R$, 使得 $y+x=0$, 记这个 y 为 $(-x)$;

命题 4. *乘法公理*

1. $\forall x, y \in R$ ，$x \times y = y \times x$ ；
2. $\forall x, y, z \in R$ ，$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ ；
3. 存在元素 $1 \in R \neq 0$ ，使得任意 $x \in R$ ，成立 $1 \times x = x$ ；
4. 对任意 $x \in R \neq 0$ ，存在 $y \in R$ ，使得 $y \times x = 1$ ，记这个 y 为 x^{-1} ；

命题 5. *分配律*

1. $\forall x, y, z \in R$ ，$(x \times y) + z = x \times z + y \times z$.

命题 6. *序关系*

1. 若 $x < y$ ，$y < z$ ，则 $x < z$ ；
2. 对任意 $x, y \in R$ ，$x < y$ ，$x = y$ ，$x > y$ 三者有且只有一个成立；
3. 与加法相容，若 $x < y$ ，对任意 $z \in R$ ，都有 $x + z < y + z$ ；
4. 与乘法相容，若 $x > 0$ ，$y > 0$ ，则 $x \times y > 0$.

命题 7. *等价关系*

1. 任意 $x \in R$ 都有 $x = x$.
2. 若 $x = y$ ，则 $y = x$.
3. 若 $x = y$ ，$y = z$ ，则 $x = z$.

这些是经过分析后，对 $+, \times, <, =$ 这四个结构最精确的刻画，其它的很多命题都可以由上述的这些性质推导出来. 比如我们认为

$$x + z = y + z \Longrightarrow x = y.$$

这实际上可以由加法公理的几条推出：若 $x+z=y+z$ ，则

$$\begin{aligned} x &= x+0 \\ &= x+(z+(-z)) \\ &= (x+z)+(-z) \\ &= (y+z)+(-z) \\ &= y+(z+(-z)) \\ &= y+0=y. \end{aligned}$$

只有这四个结构不足以刻画我们想要的 R , 因为 Q 也具有这样的四个结构，我们印象中对 Q 和 R 的区别就是几何性质的，我们认为 R 对应一条连续的直线，而 Q 是有漏洞的虚线。

利用 Q 来构造 R 的过程就是怎么只用 Q 这个系统内部的元素和结构来表示这些洞。

我们在下一小结讲构造的过程，这里我们还是先列举 R 在我们心里有哪些几何性质。

也是经过一番分析，R 一共具有六个**等价**的几何性质，这其中包括我们在上一节中提到的确界原理和紧性：

命题 8. 确界存在定理

内容：非空有上界的实数集必有上确界；非空有下界的实数集必有下确界。

用符号表述：设 $S\subseteq\mathbb{R}$ 非空。若 S 有上界，则 $\sup S$ 存在；若 S 有下界，则 $\inf S$ 存在。

直观：实数系中，有“天花板”的集合一定有一个最小的天花板（上确界），即使这个确界不在集合内部. 有理数集不具备此性质，例如 $\{x\in\mathbb{Q}|\ x^2<2\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界。

命题 9. 单调有界定理

内容：单调递增且有上界的数列必收敛；单调递减且有下界的数列必收敛.

直观：一直单调增加但始终不超过某个数，则数列必然趋近于一个极限. 这体现了实数系“无洞”的性质——极限不会跑出实数集。

命题 10. 闭区间套定理

内容：设 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列闭区间，满足：

1. $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$（嵌套）；
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$（长度趋于 0）。

则存在唯一实数 ξ，使得 $\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，且

$$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

直观：不断缩小的闭区间套最终会精确锁定一个点。

命题 11. 有限覆盖定理（Heine–Borel 定理）

内容：设 $[a,b]$ 是一个闭区间，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族开区间，满足

$$[a,b]\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha.$$

则存在有限个开区间 $U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\ldots,U_{\alpha_k}$ 使得

$$[a,b]\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}.$$

直观：用任意多个开区间覆盖一个闭区间，总可以从中选出有限个来仍然覆盖整个闭区间.这个性质对开区间不成立（例如 $(0,1)$ 被 $\{(\frac{1}{n},1)\}$ 覆盖，但无有限子覆盖）。

命题 12. 聚点定理（Bolzano–Weierstrass 定理）

有界数列必有收敛子列。

设 $\{a_n\}$ 是实数列，若存在 $M>0$ 使 $|a_n|\leq M$ 对所有 n 成立，则存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛。

直观：有界区间内的无穷点列必然在某处“聚集”，从而可抽出收敛子列.这是分析中证明极限存在性的重要手段。

命题 13. 柯西收敛准则

内容：实数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\iff$ $\{a_n\}$ 是柯西列，即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathcal{N}, \text{使得 } \forall m, n > N,\ |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

直观：不需要预先知道极限值，只需检验数列后面的项彼此无限接近，就能保证它在实数系中收敛。有理数系中柯西列不一定收敛（如逼近 $\sqrt{2}$ 的有理数列），而实数系的完备性正体现于此。

这六个定理在实数系中逻辑等价，教材通常选取其中一个作为公理（如确界原理），再推出其余五个。它们共同刻画了实数系的“连续性”（无“空隙”），是微积分的理论基石 。

2.3 从 $\mathbb{Q}$ 构造 $\mathbb{R}$

我们想要从 $\mathbb{Q}$ 出发构造 $\mathbb{R}$ 。我们的材料是 $\left(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \times_{\mathbb{Q}}, <_{\mathbb{Q}}, =_{\mathbb{Q}}\right)$，目标是满足2.2节中各种命题的 $\left(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \times_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}}, =_{\mathbb{R}}\right)$。

怎么用有理数取构造实数呢?

我们会想到极限，任意一个实数都可以由一个有理数序列的极限表示，所以

$$\mathbb{R} = \left\{\lim_{n\to\infty} q_n \mid \{q_n\}\text{是收敛的有理数列}\right\},$$

这样看似就完成了工作。

问题在于，不论是 $\lim$ 符号还是“收敛”，我们的定义都绕不开实数，但是我们现在的工作就是构造实数，我们就不能用实数出现后才有的概念来定义实数，这样就循环定义了。

但是这个想法是没问题的，我们可以换种说法，我们知道有理数列收敛等价于有理数列是柯西列，而柯西列的定义是基于项之间的关系，不涉及还没出现的实数极限：

定义 4. 有理柯西列

设 $\{q_n\}$ 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 中的序列，若对于任意有理数 $\varepsilon >_{\mathbb{Q}} 0$ ，都存在正整数 N 使得：任意正整数 $m, n >_{\mathbb{Q}} N$ ，都有

$$|q_n - q_m| < \varepsilon,$$

则称序列 $\{q_n\}$ 是有理柯西列。

我们的想法还是用有理柯西列来表示它实际上的实数极限。我们可以把这个表示关系用映射记下来：

$$F(\{q_n\}) = \lim_{n\to\infty} q_n.$$

我们把所有有理柯西列的集合记作 $\overline{R}$, 区别开我们印象中的 $\mathbb{R}$ 。我们希望在 $\overline{R}$ 上构造出和 $\mathbb{R}$ 上相同的结构，即

$$(\overline{R}, \oplus, \otimes, \ll, \simeq)$$

且这些结构的定义只基于 $\left(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \times_{\mathbb{Q}}, <_{\mathbb{Q}}, =_{\mathbb{Q}}\right)$。

换个角度思考，我们其实只是把印象里的 $\left(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \times_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}}, =_{\mathbb{R}}\right)$ 换个名字，而 F 就是这个“换名函数”。

也就是说我们希望有：

命题 14. “换名函数” F

F 是从 $\overline{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射，对任意 $\{q_n\}, \{p_n\} \in \overline{R}$， $F(\{q_n\}), F(\{p_n\}) \in \mathbb{R}$ ，都有：

1. $F(\{q_n\} \oplus \{p_n\}) =_{\mathbb{R}} F(\{q_n\}) +_{\mathbb{R}} F(\{p_n\})$.
2. $F(\{q_n\} \otimes \{p_n\}) =_{\mathbb{R}} F(\{q_n\}) \times_{\mathbb{R}} F(\{p_n\})$.
3. $\{q_n\} \ll \{p_n\} \Longleftrightarrow F(\{q_n\}) <_{\mathbb{R}} F(\{p_n\})$.
4. $\{q_n\} \simeq \{p_n\} \Longleftrightarrow F(\{q_n\}) =_{\mathbb{R}} F(\{p_n\})$.

（在代数上这好像是说这两个系统是同构的。）

这也就提示我们怎么去定义 $(\overline{R}, \oplus, \otimes, \ll, \simeq)$ 。

我们给出严谨的定义，这些都是通过分析命题14.得到的构造，不难，你也可以自己试试：

定义 5. $\simeq$

对任意 $\{q_n\}, \{p_n\} \in \overline{R}$ ，若对于任意有理数 $\varepsilon >_{\mathbb{Q}} 0$ ，存在正整数 N ，使得：任意 $n >_{\mathbb{Q}} N$ ，都有

$$|q_n -_{\mathbb{Q}} p_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon.$$

则称 $\{q_n\} \simeq \{p_n\}$ 。

定义 6. $\oplus$

对任意 $\{q_n\},\{p_n\}\in\overline{R}$ ，定义

$$\{q_n\}\oplus\{p_n\}:=\{q_n+_{\mathbb{Q}}p_n\}.$$

定义 7. $\otimes$

对任意 $\{q_n\},\{p_n\}\in\overline{R}$ ，定义

$$\{q_n\}\otimes\{p_n\}:=\{q_n\times_{\mathbb{Q}}p_n\}.$$

定义 8. $\ll$

对任意 $\{q_n\},\{p_n\}\in\overline{R}$ ，若 $\{q_n\}\not\simeq\{p_n\}$ 且任意有理数 $\varepsilon>_{\mathbb{Q}}0$ ，存在正整数 N ，使得：任意 $n>_{\mathbb{Q}}N$ ，都有

$$q_n<_{\mathbb{Q}}p_n.$$

则称 $\{q_n\}\ll\{p_n\}$ 。

我们可以验证 $(\overline{R},\oplus,\otimes,\ll,\simeq)$ 满足2.2节中的命题3-7，只需把相应符号进行替换。

我们这节的重点是证明这个 $(\overline{R},\oplus,\otimes,\ll,\simeq)$ 满足我们希望的几何假设，我们最终选取确界原理作为验证，一是因为它的引入很自然，二是因为上确界的描述只基于序关系 $\ll$ ，不需要新定义什么概念：

定义 9. 上界，上确界

设 E 是 $\bar{R}$ 上的一个非空子集，若存在 $\{p_n\}\in\bar{R}$ 使得任意 $\{q_n\}\in E$ 都满足 $\{q_n\}\ll\{p_n\}$ 或 $\{q_n\}\sim\{p_n\}$ ，则说 $\{p_n\}$ 是集合 E 在 $\bar{R}$ 中的一个上界。

若 $\{p_n\}$ 是非空集合 E 在 $\bar{R}$ 中的一个上界，且任意 $\{x_n\}\in\bar{R}\ll\{p_n\}$ 都不是 E 的上界，则称 $\{p_n\}$ 是 E 的上确界。

定理 5. 确界原理

若非空子集 E 在 $\bar{R}$ 中有上界，则一定存在 $\{p_n\}\in\bar{R}$ 是它的上确界。

证明. 设 $\{q_n\}\in E$ ， $\{p_n\}$ 是 E 在 $\overline{R}$ 中的一个上界。

我们希望用 $\{q_n\},\{p_n\}$ 构造出集合 E 的上确界 $\{x_n\}$ 。

思考，在 $\mathbb{R}$ 中，我们应该怎么用 $q=F(\{q_n\}), p=F(\{p_n\})$ 构造出 $F(E)$ 的上确界 $x=F(\{x_n\})$ 呢?

我们想到二分法，令 a_1 是 q,p 的中点，若 a_1 是 $F(E)$ 的上界，令 $b_1=q$ ；若 a_1 不是 $F(E)$ 的上界，令 $b_1=p$ 。又令 a_2 是 a_1,b_1 的中点... 一直找下去，$a=\lim_{n\to\infty}a_n$ 就是 $F(E)$ 的上确界。

上面二分法的过程，严谨写出来是：归纳定义 $a_{k+1}=(a_k+_{\mathbb{R}}b_k)/2$, $b_{k+1}\in\{a_k, b_k\}$ 且 a_{k+1},b_{k+1} 中有且只有一个是 $F(E)$ 的上界。

回到 $\overline{R}$ 中我们可以定义：令

$$\{a_{0,n}\}=\{\frac{q_n+_{\mathbb{Q}}p_n}{2}\}.$$

若 $\{a_{0,n}\}$ 是 E 在 $\bar{R}$ 中的上界，则令 $\{b_{0,n}\}=\{q_n\}$ ；若 $\{a_{0,n}\}$ 不是上界，则令 $\{b_{0,n}\}=\{p_n\}$ 。归纳定义

$$\{a_{m+1,n}\}=\{\frac{a_{m,n}+_{\mathbb{Q}}b_{m,n}}{2}\},$$

$\{b_{m+1,n}\}\in\{a_{m,n},b_{m,n}\}$ 且 $\{a_{m+1,n}\},\{b_{m+1,n}\}$ 中有且只有一个是 E 的上界。

(分数 $1/2$ 是有理数 2 在运算 $\times_{\mathbb{Q}}$ 下的逆元，并不涉及 $\mathbb{Q}$ 系统之外的概念。)

(后面我会省略运算符下标，大家只需知道我们使用的运算符都是在当前语境对应的集合里的)

我们上面说，在 $\mathbb{R}$ 中

$$a=\lim_{m\to\infty}a_m=\lim_{m\to\infty}F(\{a_{m,n}\})=\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}a_{m,n}\right)$$

是 $F(E)$ 的上确界。

现在要构造一个有理柯西列 $\{x_n\}\in\overline{R}$ 是 E 的上确界，那么就是

$$F(\{x_n\})=a$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}a_{m,n}\right)$$

怎么构造这样的 $\{x_n\}$?

我们把方阵排出来

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & \cdots & a_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & \cdots & a_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & \cdots & a_3 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & \cdots & a_4 \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & \cdots & a_5 \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & \cdots & a_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a \end{matrix}$$

每一行从左往右趋近最右边的 a_m ，最右边一列从上到下又趋近左下角的 a 。

如果给一个误差 $\epsilon > 0$ ，我们可以在每一行找到一个 a_{m,L_m} 使得 $|a_{m,L_m} - a_m| < \epsilon$ ，那这个序列 $\{x_k | x_k = a_{k,L_k}\}$ 如果收敛，极限 x 也会满足 $|x-a| < \epsilon$ 。

更进一步，每一行的误差不相同，随着行数趋于0，最后的极限 x 是不是就等于 a 了？

如果我们令 N_m 是满足

$$|a_{m,N_m} - a_m| < \frac{1}{m}$$

的正整数。那么令 $\{x_k | x_k = a_{k,N_k}\}$ ，有

$$|x_k - a| \le |a_{k,N_k} - a_k| + |a_k - a| < \frac{1}{k} + |a_k - a| \to 0 \quad .$$

此时的 $\{x_k | x_k = a_{k,N_k}\}$ 的极限就是 a ，也就是我们要找的有理柯西列。

我们的工作还没做完，上面是我们借助印象里的 $\mathbb{R}$ 找到了构造 $\{x_n\}$ 的方法，我们依旧要写一个只依赖 $\mathbb{Q}$ 和 $\overline{R}$ 的验证过程。

回到 $\bar{R}$ ，我们写一个严谨的过程，首先这里没有 $a_m = F(\{a_{m,n}\})$ ，所以我们定义：N_m 是满足：任意给定 $l \ge N_m$ ，都有

$$|a_{m,N_m} - a_{m,l}| < \frac{1}{m}$$

的正整数。 这肯定能取到因为 $\{a_{m,n}\}$ 都是有理数柯西列，这就是定义。

令 $\{x_k|x_k = a_{k,N_k}\}$ 我们依次证明

1. $\{x_k\}$ 是有理数柯西列，也就是 $\{x_k\} \in \bar{R}$ ；

2. $\{x_k\}$ 是 E 在 $\bar{R}$ 中的上界；

3. 是上确界。

1. 任意取定有理数 $\epsilon > 0$. 我们知道对任意 n ，

$$|a_{m+1,n} - a_{m,n}| = \frac{|a_{m,n} - a_{m-1,n}|}{2} = \frac{|q_n - p_n|}{2^{m+2}} \qquad .$$

又由有理数柯西列的定义，存在正有理数 M_1 ，对任意 n ，都有

$$|q_n - p_n| < M_1 \qquad .$$

存在一个正整数 $M_2 > M_1$ 满足

$$\frac{1}{M_2} + \frac{M_1}{2^{M_2+2}} < \epsilon \qquad .$$

故任取 $m_1, m_2 > M_2$ ，不妨假设 $N_{m_1} \geq N_{m_2}$ ，我们有

$$\begin{aligned}
|x_{m_1} - x_{m_2}| =& |a_{m_1,N_{m_1}} - a_{m_2,N_{m_2}}| \\
\leq& |a_{m_1,N_{m_1}} - a_{m_2,N_{m_1}}| + |a_{m_2,N_{m_1}} - a_{m_2,N_{m_2}}| \\
<& \frac{M_1}{2^{M_2+2}} + \frac{1}{M_2} \\
<& \epsilon \qquad .
\end{aligned}$$

证毕。

2. 反证法

如果 $\{x_k\}$ 不是 E 的上界，则存在 $\{y_k\} \in E \gg \{x_k\}$ 。

在 $\mathbb{R}$ 中就是

$$\mathrm{lim} y_k > \lim x_k.$$

也就是说

引理 1.

存在有理数 $\delta>0$ ， 正整数 M_1 ， 任意 $k_1,k_2>M_1$ 都有

$$y_{k_1}>x_{k_2}+100\delta.$$

这个引理1.可以不借助 $\mathbb{R}$ 给出证明。留作习题。

我们知道 $x_m=a_{m,N_m}$ ， 任意 $l\geq N_m$ ，都有

$$|a_{m,N_m}-a_{m,l}|<\frac{1}{m}.$$

所以任意 $k_1,m>M_1$ ， $l\geq N_m$都有

$$y_{k_1}>x_m+100\delta>a_{m,l}-\frac{1}{m}+100\delta.$$

当 m 充分大时，任意 $k_1>M_1,l\geq N_m$ 都有

$$y_{k_1}>a_{m,l}+50\delta.$$

也就是说存在正整数 M_2 ， 任意 $m>M_2$ 都有

$$\{y_n\}\gg\{a_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$$

从 $\{a_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的取法知道，此时 $\{b_{m+1,n}\}_{n=1}^{\infty}=\{b_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}=\cdots=\{b_{M+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ $(m>M_2)$，记作 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 。$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 的上界且

$$0<b_n-a_{m+1,n}=\frac{b_n-a_{m,n}}{2}\ ,\qquad (m>M_2).$$

在“1. $\{x_k\}$ 是有理数柯西列”的证明部分我们就计算过类似的，可以试着自己算一下， 总之我们会证明 $\{x_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是等价的。这就导出了矛盾。

3. 证明留给读者。

□

我们验证了确界原理在 $(\overline{R},\oplus,\otimes,\ll,\simeq)$ 上是成立的。

现在我们有了一个满足确界原理， 又满足我们熟知的代数性质的空间， 我们就相当于构造出了实数系， 只不过是“改名版的”。

3 集合的基数

3.1 实数比有理数多吗?

在上一节我们提到，实数是一条连续的直线，而有理数是有洞的虚线。理所当然地，我们会认为这是因为有理数太少了，而实数显然比有理数多。

但是认真思考， 会提出一个问题， 集合的几何属性真的只由元素数量决定吗？排布方式会不会影响？我们知道有理数也是有无穷多个的，如果把它们排列得密集一点，它还会是有洞的吗？会不会就是连续的直线了？

要讨论有理数和实数到底哪个多，我们应该统一一下，“多少”的定义。

怎么比较两个集合元素的多少？相信很多人认为是数数， 但是别说无穷和无穷怎么比较了， 事实上我们在面对两堆数量很多的物品的时候， 我们也并没有数清楚。

我们实际上有在用一种映射的思想，如果存在从集合 A 到集合 B 的单射, 就认为 B 的元素“多于” A 。

这种思想在儿童身上更明显， 可能因为他们数数的能力更差。**宋颖和胡清芬 (2009)** 发表在《心理与行为研究》上的论文 **《4~5岁儿童一一对应任务中的比例效应》** 有提到儿童会用“匹配”策略替代数数，也就是将两集合的元素一一匹配， 匹配后仍有剩余元素的集合则多， 元素不足的则少。这其实就是用映射来刻画集合之间的"多少"关系。

我们试着用映射的语言给集合的“多少关系”下一个定义:

定义 10. 集合的“多少关系”

设 A,B 是两个集合，若存在从集合 A 到集合 B 的单射，则称集合 A 元素“少于”集合 B 。沿用中学时的记号，$|A|<|B|$ 。

当集合是有限集时，这个定义没问题， 也符合我们的印象。当集合是无限集时， 如果你仔细思考， 你会发现这样一个问题:

问题 1.

设 A,B 是无限集，若存在从集合 A 到集合 B 的单射，能否同时存在集合 B 到集合 A 的单射?

如果可以同时存在，那么就意味着 A “少于” B 的同时 B “少于” A 。这种“少于”关系， 不太符合我们的想象。

事实上考虑正整数集 $\mathbb{N}^+$ 和自然数集 $\mathbb{N}$ ， 我们发现

$$f:\mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}, f(n)=n$$

和

$$g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^{+}, f(m)=m+2$$

都是严格的单射。

所以我们有必要修改一下定义：我们希望“多少关系”是一个2.2节命题6里那样的序关系，即任意集合 A, B ，$|A|<|B|, |A|=|B|, |A|>|B|$ 有且仅有一个成立。所以如果集合 A 到 B 有单射，集合 B 到 A 有单射，我们是希望这种情况对应 $|A|=|B|$ 。所以我们对集合 A 到 B 有单射应该定义成 $|A|\leqslant|B|$ 。

所以有:

定义 11. 集合的基数

如果存在从集合 A 到集合 B 的单射, 就说 B 的“基数”大于等于 A 的“基数”, 记作 $|B|\geq|A|$。如果存在从 A 到 B 的双射, 就说它们基数相等或者等价, 记作 $|A|=|B|$。

我们刚刚说了，希望由“$|A|\leq|B|$ 且 $|A|\geq|B|$”能推出“$|A|=|B|$”。换言之，我们要证明：如果存在从 A 到 B 的单射, 也存在从 B 到 A 的单射, 那么这两个集合之间存在双射。

定理 6. Schroeder-Bernstein 定理

设 A, B 是非空集合。如果存在从 A 到 B 的单射和从 B 到 A 的单射, 那么存在从 A 到 B 的双射。

证明. 设 $f\colon A\to B$ 与 $g\colon B\to A$ 都是单射 。 我们希望利用它们构造一个从 A 到 B 的双射 F 。 由于单射在任意子集上的限制仍是单射, 我们尝试将 A 分成两个恰当的区域:

$$A=A_1\cup A_2,$$

使得定义

$$\gamma(x)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } x\in A_1, \\ g^{-1}(x), & \text{若 } x\in A_2 \end{cases}$$

是一个双射 。

先分析 A_1, A_2 应满足的条件 。 要使 $g^{-1}(x)$ 在 A_2 上有定义, 需 $A_2\subset g(B)$ 。记 $A_0=A\setminus g(B)$, 则 $A_0\subset A_1$ 。 因此, A_1 的最小可能为 A_0, 最大为 A 。 当 $A_1=A_0$ 时, g^{-1} 给出 A_2 到 B 的双射, 加上 $f\colon A_1\to B$ 后成为满射（可能“溢出”）; 当 $A_1=A$ 时, $\gamma=f$ 是单射（可能“未填满”）。 我们希望找到一个临界点, 使得 γ 既是单射又是满射 。

γ 是单射 $\Longleftrightarrow f(A_1)\cap g^{-1}(A_2)=\emptyset \Longleftrightarrow g(f(A_1))\cap A_2=\emptyset$ 。 $\Longleftrightarrow h(A_1)\subset A_1$ ，其中 $h=g\circ f$ 。

γ 是满射 $\Longleftrightarrow B\subset f(A_1)\cup g^{-1}(A_2) \Longleftrightarrow g(B)\subset h(A_1)\cup A_2 \Longleftrightarrow A_1\setminus h(A_1)=A\setminus h(A_1)\cap A_1\subset A\setminus g(B)=A_0 \Longleftrightarrow A_1\subset h(A_1)\cup A_0$ 。

我们考虑集族 $\mathcal{F}=\{X\subset A|h(X)\cup A_0\subset X\}$ 和集族 $\mathcal{E}=\{X\subset A|X\subset h(X)\cup A_0\}$ 。 当 $A_1\in\mathcal{F}$ 时 γ 是单射; 当 $A_1\in\mathcal{E}$ 时 γ 是满射 。 当 $A_1\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}$ 也就是 $A_1=h(A_1)\cup A_0$ 时 γ 恰好是双射 。 现在问题就是怎么确定 $\mathcal{F}\cap\mathcal{E}$ 不是空集? 换句话说，怎么证明存在满足这个等式的 A_1 ? 直觉上从 $A\in\mathcal{F}$ 到 $A_0\in\mathcal{E}$ ，取的范围是在 “变小” 的 。 我们希望存在 $A_1\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}$ 那这个 A_1 就应该是 $\mathcal{F}$ 中范围最小的或者说 $\mathcal{E}$ 中范围最大的 。 那我们就想到了令

$$A_1=\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X$$

这个定义是合法的因为 $\mathcal{F}$ 确实不是空族， 我们有 $A\in\mathcal{F}$ 。 我们只需要验证这个 A_1 是否在集族 $\mathcal{E}$ 中就行了 。

证明留给大家 。 □

3.2 可数集

基数最小的无穷集是什么?

显然是自然数集，你可以建立从 $\mathbb{N}$ 到任意一个无穷集的单射。

我们于是把和 $\mathbb{N}$ 基数相等（也称“等势”）的集合叫做“可数集”。

定义 12. 可数集

若集合 A 与自然数集 $\mathbb{N}$ 存在双射，则称 A 是一个可数集。

有些教材会将有限集也叫可数集， 我们这里不做区分， 因为有限集很简单，你可以自行讨论。

事实上, A 是可数集, 按定义即存在一个双射 $f:\mathbb{N}_+\to A$, 使得 $A=\{f(n)|n=0,1,2,\ldots\}$。

也就是说, 如果 A 中的元素可以排列成一列: $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$ (有起点), 那么定义 $f(n)=a_n$ 即满足条件的双射。这是对可数集的一个直观解释。在许多教材中,可数集也被称为“可列集”。(我们有时候从 a_1 开始记。)

我们列举一些可数集的例子。

例 2. 负整数集 $\mathbb{Z}_{<0}$

负整数集 $\mathbb{Z}_{<0}$ 是一个可数集。

证明略。

例 3. 整数集 $\mathbb{Z}$

整数集 $\mathbb{Z}$ 是一个可数集。

我们想到可以把 $\mathbb{Z}$ 排成这样一列:

$$0, -1, 1, -2, 2, \ldots.$$

这就建立了到自然数集的双射。

很有趣，$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{>0} \cup \mathbb{N}$ 是两个可数集的并集，但它仍是可数集。事实上我们用同样的做法证明:

定理 7. 有限个可数集的并集

设 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是 m 个可数集，则它们的并集

$$\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} A_i$$

是可数集。

证明. 把元素都列出来我们将得到一个方阵:

$$\begin{array}{llllll}
A_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & \ldots \\
A_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & \ldots \\
\vdots & & & & & \\
A_m & a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & \ldots
\end{array}$$

其中第 i 行是集合 A_i 的所有元素，因为是可数集所以可以列举出来。

整个方阵就是并集的所有元素（可能有重复的），我们只需像例3. 一样，先“数”完一列，再数后一列，就可以把整个方阵给列举出来。

$$\begin{array}{llllll}
A_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
A_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & \ldots \\
\vdots & & & & & \\
A_m & a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & \ldots
\end{array}$$

□

我们当然想到了，可数个有限集的并集也是可数集，按上面列成方阵，每一排都是有限的，数完整排再数下一排即可。

定理 8. 可数个有限集的并集

设 $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ 是可数个有限集，则它们的并集

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

是可数集。

当考虑无穷个集合的并集时，我们有时会这样记：

$$\bigcup_{i\in I} A_i,$$

其中 I 是指标集，存在一个双射

$$f: I \longrightarrow \{A_i\}, f(i) = A_i.$$

当 I 是可数集时，就表示可数个集合的并集。当 I 是比可数集基数更大的集合时，也可以表示 $|I|$ 个集合的并集。

“有限个可数集”和“可数个有限集”都证明了是可数集，下一步就会想到“可数个可数集”，它对应一个无限延生的方阵 $(a_{i,j})$ 其中 $i, j \in \mathbb{N}^+$ 。

我们知道全体正有理数 $\mathbb{Q}_{>0}$ 都可以写成 i/j 的形式，那么就存在一个单射从 $\mathbb{Q}_{>0}$ 到这个方阵 $(a_{i,j})$ ：

$$f: \mathbb{Q}_{>0} \longrightarrow (a_{i,j}), f(i/j) = a_{i,j}.$$

所以如果我们证明了方阵 $(a_{i,j})$ 可数，那么有理数集就是可数集；如果方阵不可数，我们也发现了第一个“不可数集”。

把方阵列出来：

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & \cdots \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

有没有一种方法不遗漏地把方阵元素列成一排，或者说，“数完”？

想象一个贪吃蛇从 a_{11} 出发，不回头地遍历所有元素，路径如下：

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
a_{21} & \leftarrow & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \cdots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
a_{31} & \rightarrow & a_{32} & \rightarrow & a_{33} & & a_{34} & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow & \\
a_{41} & \leftarrow & a_{42} & \leftarrow & a_{43} & \leftarrow & a_{44} & \cdots \\
\downarrow & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

顺着箭头方向，可以将所有 a_{ij} 排成一列，因此方阵是可数的。

如果没有玩过贪吃蛇，你或许想不到，但也可以从我们前两种更简单的情况入手，试着把“可数个可数集”归纳成“有限个可数集”或“可数个有限集”。

我们试着把方阵分割成可数个有限集：例如，取正方形区域 $A_k = \{a_{ij} | \, i \leq k, j \leq k\}$，每个 A_k 是有限集，且整个方阵阵等于 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 。根据可数个有限集的并集仍可数的结论，原方阵可数。

$$
A_3 = \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}
$$

所以我们就证明了正有理数集 $\mathbb{Q}_{>0}$ 是可数的，显然有理数集

$$
\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<0} \bigcup \{0\} \bigcup \mathbb{Q}_{>0}
$$

也是可数的。

这似乎佐证了我们一开始的担心，排列方式不同会让你感觉 $\mathbb{N}$ 比 $\mathbb{Q}$ 的元素少得多。

3.3 不可数集

有没有集合的基数比可数集的大？

目前我们不清楚哪个集合是不可数的，我们想办法用可数集构造出一个不可数集。并集已经验证了，可数个可数集的并集还是可数集。还有什么方法？

在高中我们知道，如果一个有限集合 A 的基数（元素个数）是 n ，则它的幂集（所有子集构成的集合）$P(A)$ 的基数是 2^n 。也就是说对于有限集 $|P(A)| > |A|$ 。那么对于无穷集呢？

定理 9. 有限集的幂集（回顾）

如果一个有限集合 A 的基数是 n ，则它的幂集$P(A)$ 的基数是 2^n 。

证明. 设集合 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ 。对于任意 $1\leqslant k\leqslant n$ ， $E\subset A$ ，有两种情况：1. $a_k\in E$ ；2. $a_k\notin E$ 。

我还记得高中老师叫我们这样记：设 $|P(A)|=m$ ， $P(A)=\{E_1,E_2,\dots,E_m\}$，有这样一个方阵，

$$\begin{array}{cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ E_1 & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & x_{1,n} \\ E_2 & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \dots & x_{2,n} \\ E_3 & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \dots & x_{3,n} \\ E_4 & x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & \dots & x_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_m & x_{m,1} & x_{m,2} & x_{m,3} & \dots & x_{m,n} \end{array},$$

其中 $x_{i,j}$ 是 0 或 1 分别表示 a_j 不在或在 E_i 中。所以 $P(A)$ 就和集合

$$B=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)|x_i\in\{0,1\}\}$$

建立起了双射。而我们可以算出 $|B|=2^n$ 。（看不出来的话可以用数学归纳法。）

□

定理 10. 可数集的幂集

如果一个集合 A 是可数集，则它的幂集 $P(A)$ 满足 $|P(A)|>|A|$ 。

证明.

如果幂集 $P(A)$ 是可数集，那么我们可以把它的元素列出来：

$$P(A)=\{E_1,E_2,\dots,E_m,\dots\}$$

其中任意 $E_i\subset A$ 。

那么我们仍然可以像之前一样，设集合 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$ ，有

$$\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \dots \\ E_1 & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & x_{1,n} & \dots \\ E_2 & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \dots & x_{2,n} & \dots \\ E_3 & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \dots & x_{3,n} & \dots \\ E_4 & x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & \dots & x_{4,n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \\ E_m & x_{m,1} & x_{m,2} & x_{m,3} & \dots & x_{m,n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array},$$

其中 $x_{i,j}$ 是 0 或 1 分别表示 a_j 不在或在 E_i 中。所以 $P(A)$ 就和集合

$$B=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|x_i\in\{0,1\}\}$$

建立起了双射。

上文说如果 $P(A)$ 是可数的，那么上面这个排列就可以把它的元素列出来。那么，如果你可以找到一个被上面的排列遗漏的元素，就说明 $P(A)$ 不是可数的。（逆否命题。）

也就是说找到一个被

$$\begin{array}{llllll}
(x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \ldots & x_{1,n} & \ldots) \\
(x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \ldots & x_{2,n} & \ldots) \\
(x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \ldots & x_{3,n} & \ldots) \\
(x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & \ldots & x_{4,n} & \ldots) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ldots \\
(x_{m,1} & x_{m,2} & x_{m,3} & \ldots & x_{m,n} & \ldots) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

遗漏的 B 的元素。

也就是找到一个

$$(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n,\ldots),y_i\in\{0,1\}$$

和上面这些都不同。

Cantor 发现，如果我们把对角线上的元素 $x_{i,i}$ 取出来，再令 $y_i=\{0,1\}\setminus\{x_{i,i}\}$，即若 $x_{i,i}=0$，则令 $y_i=1$；若 $x_{i,i}=1$，则令 $y_i=0$。那么

$$(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n,\ldots)$$

会和任意一行的数组都有至少一个位置（$x_{i,i}$）上的不同。也就是说我们找到了一个被遗漏的元素。

综上我们就证明了 $|P(A)|>|A|$。

□

熟悉二进制的读者会发现，这一证明实际上也说明了实数集是不可数的，请大家自行思考。

事实上这个对角线方法还可以推广，我们可以证明任何集合的幂集的基数都大于自身。

定理 11. 集合的幂集

对任意一个集合 A，它的幂集 $P(A)$ 满足 $|P(A)|>|A|$。

证明. 设 A 是任意不可数集合， $\mathcal{P}(A)$ 是其幂集。假设存在双射 $f\colon A\to\mathcal{P}(A)$，则

$$\mathcal{P}(A)=\{f(a)|\,a\in A\}.$$

回忆之前对于可数集 A_0 的对角线方法：我们先假设存在双射 $g\colon A_0\to\mathcal{P}(A_0)$，于是 $\mathcal{P}(A_0)=\{g(a_n)|\,a_n\in A_0\}$。然后找到了一个 A_0 的子集 Y是被遗漏的，其中 Y 是这样构造的：若 $a_n\in g(a_n)$，则令 $a_n\notin Y$；若 $a_n\notin g(a_n)$， 则令 $a_n\in Y$。

类似地，我们可以构造 A 的子集 E：对任意 $a\in A$， 若 $a\in f(a)$ ，则令 $a\notin E$； 若 $a\notin f(a)$ ，则令 $a\in E$。显然， E 与每个 $f(a)$ 都不同，这就导出了矛盾，因此不存在从 A 到 $\mathcal{P}(A)$ 的双射 (更准确地说, 不存在满射)。 □

3.4 实数集

我们最后讨论和实数集有关的集合的基数。

问题 2. 实数集的基数

实数集 $\mathbb{R}$ 是可数集吗？请讨论。

证明. Cantor 的证明。

事实上 Cantor 的对角线方法应该出自这里。假设 $[0,1]$ 中的实数是可数的，则它们可以排成一个无穷序列

$$r_1,r_2,r_3,\ldots$$

将每个实数表示为十进制小数（约定不使用无穷多个 9 的表示法，例如 $0.1000\ldots$ 代替 $0.0999\ldots$），即

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.\,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\ldots\\ r_2 &= 0.\,a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24}\ldots\\ r_3 &= 0.\,a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34}\ldots\\ &\vdots \end{aligned}$$

其中每个 $a_{ij}\in\{0,1,\ldots,9\}$。

现在构造一个新数 $x=0.\,b_1\,b_2\,b_3\ldots$，其小数位按如下规则确定：

$$b_n=\begin{cases}5, & \text{若 } a_{nn}\neq 5,\\ 6, & \text{若 } a_{nn}=5.\end{cases}$$

于是 $b_n \neq a_{nn}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。由于 b_n 只取 5 或 6，不会出现以无穷多个 9 结尾的情形，因此 x 是 $[0,1]$ 中一个良定义的实数。

对于任意 n，x 与 r_n 在第 n 位小数上不同，故 $x \neq r_n$。这意味着 x 不在序列 $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ 中，与“所有 $[0,1]$ 中的实数都已列出”的假设矛盾。

因此假设不成立，$[0,1]$ 中的实数不可数。 □

定理 12.

复数集 $\mathbb{C}$ 与实数集 $\mathbb{R}$ 等势 。

复数集可视为实数集与自身的“笛卡尔积”：

$$\mathbb{C} = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

构造映射如下：对任意 $r \in (0,1)$，将其写成无穷小数形式 (规定不以 0 为循环节)：

$$r = 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots,$$

令

$$f(r) = (a,b), \quad a = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots, \; b = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots.$$

这给出了一个从 $(0,1)$ 到 $(0,1) \times (0,1)$ 的映射 。

但需要注意一些细节：对于有限小数，如 0 。1，我们应将其表示为 $0.0999\ldots$ 而非 $0.1000\ldots$，以保证表示唯一 。 即便如此，f 仍可能漏掉某些点 (例如 $(0,0.1)$ 不在像中) 。 不过，被遗漏的只是可数个复数，即 $(0,1) \times (0,1) \setminus f[(0,1)]$ 是可数集 。

若 E 是不可数集，F 是其可数子集，则 $E \setminus F$ 与 E 仍等势 。 因此，$f[(0,1)]$ 与 $(0,1) \times (0,1)$ 等势，从而可建立 $(0,1)$ 到 $(0,1) \times (0,1)$ 的双射 (利用 Schroeder-Bernstein 定理，见后文) 。 由此可得 $(0,1)$ 与 $(0,1) \times (0,1)$ 等势，进而 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 等势 (因为 $\mathbb{R}$ 与 $(0,1)$ 等势，$\mathbb{C}$ 与 $(0,1) \times (0,1)$ 等势) 。

定理 13.

推广：$\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^\infty$ 均与 $\mathbb{R}$ 等势 。

其中 R^∞ 表示可数个 $\mathbb{R}$ 的笛卡尔积，

$$\mathbb{R}^\infty = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots) | r_n \in \mathbb{R}\}.$$

由数学归纳法易证 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}$ 等势 。 对于 $\mathcal{R}^\infty$ 我们仍考虑与它等势的子集 $(0,1)^\infty=\{(x_1,x_2,\dots)|\,x_i\in\mathbb{R}\}$, 对任意一个 $(x_1,x_2,\dots)$ 我们可以把它表示成一个方阵

x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\cdots$
x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\cdots$
x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\cdots$
x_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\cdots$
x_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

其中 $x_i=0.\,a_{i1}\,a_{i2}\,a_{i3}\dots$。

前面构造的贪吃蛇路径（或对角线枚举）可将这个无限矩阵对应为一个序列, 从而建立单射 $\phi\colon(0,1)^\infty\to(0,1)$,

$$\phi(x_1,x_2,\dots)=0.\,a_{11}\,a_{12}\,a_{22}\,a_{21}\,a_{31}\dots,$$

说明两者等势 。

4 连续函数

4.1 从历史到定义

历史上人们对“连续”的理解就是：当自变量的变化是无穷小时，因变量的变化也是无穷小。

得益于极限的概念我们知道无穷小就是极限为 0 。

也就是说我们期待 $x-x_0\to 0$ 时 $f(x)-f(x_0)\to 0$ 。

参考数列极限，对于一般的函数我们当然也可以定义极限，所谓 $x\to a$ 时 $f(x)\to b$ 应该这样定义：

定义 13. 函数极限

设 $a,b\in\mathbb{R}$ ， f 在 a 的某个邻域上有定义，若任给 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，当

$$|x-a|<\delta$$

时有

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

则称 f 在 $x=a$ 处的极限是 b 。记作 $f(x)\to b,(x\to a)$ 或者

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

（定义13. 不需要 f 在 $x=a$ 处有定义。这么定义为了让它适应更一般的场景。）

所谓连续就应该是把 b 换成 $f(a)$ 。

定义 14. 函数的连续性

设 $a,b\in\mathbb{R}$ ， f 在 a 的某个邻域上有定义，若 $x\to a$ 时 $f(x)\to f(b)$ ，则称 f 在 $x=a$ 处连续。

我们有时候会研究闭区间上的函数，那么对于区间端点，我们只用考虑一侧，这让我们想到定义单侧极限和单侧连续，这里略过。

4.2 函数极限的性质

和数列极限一样我们可以证明函数极限也具有相应的性质。

定理 14. 极限的四则运算

设 $x \to x_0$ 时 $f \to \alpha, g \to \beta$，则有

1. $f+g \to \alpha+\beta$ ；

2. $f \cdot g \to \alpha\beta$ ；

3. 若 $\beta \neq 0$ 则 $f/g \to \alpha/\beta$ 。

定理 15. 夹逼定理

设 f, g, h 是函数，a 是实数，且存在一个邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ ，当 $x \in (a-\delta, a+\delta)$ 时

$$f \leq g \leq h$$

恒成立。若

$$\lim_{x \to a} f = \lim_{x \to a} h = b,$$

则

$$\lim_{x \to a} g = b.$$

我们经常需要处理复合函数，所以有

定理 16. 复合函数的极限

设函数 $f(y)$ 在 y_0 处的极限是 a ，函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限是 y_0 。**如果存在 x_0 的一个去心开邻域 $V(x_0, r)$，在此开邻域中 $g(x) \neq y_0$ ，** 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限是 a 。

为什么要加**黑字**条件，是因为这样的例子

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0. \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

又 $g(x) \equiv 0$ 。 大家可以算一下。